

<b>1</b>	<b>Des équations de Maxwell à l'optique géométrique.....</b>	<b>1</b>
1.1	Équations de Maxwell.....	1
1.2	L'optique géométrique.....	2
1.2.1	L'équation de l'iconale.....	2
1.2.2	Le vecteur de Poynting en optique géométrique.....	4
1.2.3	Équation des rayons lumineux.....	5
1.3	Exemple du milieu d'indice $n(\mathbf{r})$ .....	7
1.4	Optique géométrique paraxiale.....	10
<b>2</b>	<b>Intégrale paraxiale de Huygens.....</b>	<b>16</b>
2.1	Spectre angulaire d'ondes planes.....	16
2.2	Faisceau optique.....	17
2.3	Propagation à travers un milieu paraxial.....	20
2.4	Caractéristiques globales de propagation d'un faisceau.....	24
2.4.1	Moment d'ordre 1.....	24
2.4.2	Moment d'ordre 2.....	27
2.4.3	Invariant de propagation.....	29
2.5	Rayon de courbure effectif.....	32
2.6	Rayon de courbure effectif complexe.....	35
<b>3</b>	<b>Modes naturels du système optique ABCD.....</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction.....	39
3.2	Divergence minimale d'un faisceau.....	39
3.3	Propagation du faisceau gaussien.....	45
3.4	Génération d'un faisceau gaussien.....	48
<b>4</b>	<b>Résonateur optique.....</b>	<b>52</b>
4.1	Résonateur sphérique.....	52
4.1.1	Analyse de l'optique géométrique.....	53
4.1.2	Résonateur à modes non confinés (instable).....	55
4.1.3	Résonateur à modes confinés (stable).....	63
4.1.4	Résonateur à conjugaison de phase.....	67
4.2	Équations intégrales des résonateurs ouverts.....	70
4.2.1	Résonateurs à modes confinés.....	72
4.2.2	Solution asymptotique du résonateur à modes non confinés.....	74
4.2.3	Résonateurs à conjugaison de phase.....	78
4.2.4	Résonateurs à miroir de réflectivité gaussienne.....	80

# 1 Des équations de Maxwell à l'optique géométrique

La génération et la propagation de la lumière sont régies par les lois de l'électrodynamique. En particulier, les équations de Maxwell, associées aux conditions aux limites des champs électrique et magnétique et d'un modèle physique du milieu de propagation, grâce aux équations de constitution, permettent la description exacte de la propagation de la lumière générée par une source. Cependant, sauf pour quelques cas particuliers, une solution exacte est extrêmement difficile à décrire en termes mathématiques pratiques. C'est pourquoi plusieurs théories approximatives ont été introduites pour décrire simplement la propagation de la lumière.

La plus utilisée, pour décrire la distribution transverse d'un champ scalaire, est, certes, la théorie de diffraction dérivée sous forme d'une intégrale de propagation à partir de l'équation d'onde. D'autre part, la théorie de propagation la plus simple est la théorie des rayons obtenue dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique. Cette approche permet d'analyser la propagation des rayons, au travers des systèmes optiques complexes, au moyen de matrices de transfert pour chacun des éléments. Depuis l'invention des lasers et, suite aux nombreuses applications pratiques de ceux-ci, la propagation de faisceau a été étudiée abondamment. Une théorie scalaire de propagation, basée sur les matrices de l'optique géométrique et l'intégrale de diffraction, a été développée et est devenue d'usage courant. C'est cette nouvelle théorie de propagation que nous comptons dériver et utiliser dans les chapitres suivants.

Afin de bien situer l'optique géométrique dans le cadre d'une approximation de la théorie électromagnétique, nous rappelons, dans ce chapitre, les fondements de la théorie des rayons et, en particulier, la théorie matricielle des rayons paraxiaux.

## 1.1 Équations de Maxwell

Nous considérons, d'abord, la propagation de la lumière dans un milieu inhomogène, isotrope, linéaire et sans perte, décrite parfaitement par les équations de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}. \quad (1.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}. \quad (1.1.2)$$

et les relations de constitution suivantes:

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}. \quad (1.1.3)$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 n^2 \vec{\mathcal{E}}. \quad (1.1.4)$$

Notez qu'ici, l'indice de réfraction  $n$  peut dépendre des coordonnées de l'espace:  $x, y, z$  ( $n(x,y,z)$ ).

Nous savons qu'une distribution spectrale quelconque, des sources qui génèrent les champs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , peut s'analyser au moyen de la théorie de Fourier comme une superposition d'ondes sinusoïdales. Ce qui nous amène à étudier, d'abord, une dépendance sinusoïdale pure des champs, en introduisant la notation phaseur pour la fréquence angulaire,  $\omega$ :

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\vec{E}(x, y, z)e^{i\omega t}\}, \quad (1.1.5)$$

$$\vec{\mathcal{H}}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\vec{H}(x, y, z)e^{i\omega t}\} \quad (1.1.6)$$

Les équations de Maxwell, pour les phaseurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , deviennent:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -ik_0\eta_0\vec{H}, \quad (1.1.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = in^2 \frac{k_0}{\eta_0} \vec{E}. \quad (1.1.8)$$

Nous avons introduit, ici, l'impédance du vide,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , et le nombre d'onde,  $k_0 = \omega/c$ , afin de se conformer aux usages de l'optique moderne qui préfère spécifier la fréquence de la source à partir de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  où  $k_0 = 2\pi/\lambda$ .

Ces deux équations vectorielles et couplées, associées aux équations de continuité des champs parallèles aux interfaces d'un système, permettent, en principe, l'étude complète d'un système optique.

## 1.2 L'optique géométrique

Lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  de la source est beaucoup plus petite que les dimensions des éléments formant le système optique, on montre que les équations de Maxwell peuvent se simplifier grandement. Cependant, une description très partielle de la propagation des champs électrique et magnétique est obtenue.

### 1.2.1 L'équation de l'iconale

On cherche des solutions des équations de Maxwell (1.1.7 et 1.1.8) sous la forme suivante:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-ik_0\vartheta}, \quad (1.2.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-ik_0\vartheta}, \quad (1.2.2)$$

où  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$ ,  $\vartheta$  et  $n$  sont des fonctions de  $x, y, z$ . Notez bien que la phase fait intervenir le vecteur d'onde  $k_0$  du vide et non celui du milieu ( $k = nk_0$ ) où se propage l'onde. Utilisant des identités vectorielles bien connues, on montre que les équations de Maxwell (1.1.7 et 1.1.8) deviennent:

$$(\vec{\nabla} \vartheta) \times \vec{E}_0 + \frac{n^2}{\eta_0} \vec{H}_0 = \frac{1}{ik_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}_0, \quad (1.2.3)$$

$$(\vec{\nabla} \vartheta) \times \vec{H}_0 + \frac{n^2}{\eta_0} \vec{E}_0 = \frac{1}{ik_0} \vec{\nabla} \times \vec{H}_0. \quad (1.2.4)$$

Lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  est très petite ( $k_0 \rightarrow \infty$ ) par rapport aux dimensions des frontières rencontrées, on peut négliger le rotationnel du côté droit des équations de Maxwell qui deviennent:

$$\vec{\nabla} \vartheta \times \vec{E}_0 - \eta_0 \vec{H}_0 = 0, \quad (1.2.5)$$

$$\vec{\nabla} \vartheta \times \vec{H}_0 + \frac{n^2}{\eta_0} \vec{E}_0 = 0. \quad (1.2.6)$$

Ces deux équations vectorielles couplées sont, en fait, six équations scalaires homogènes. On sait qu'on peut trouver des solutions non nulles seulement si le déterminant est nul. Pour trouver le déterminant, on découple les équations en remplaçant la valeur de  $H_0$ , obtenue en (1.2.5), dans l'équation (1.2.6) pour obtenir:

$$\vec{\nabla} \vartheta \times (\vec{\nabla} \vartheta \times \vec{E}_0) + n^2 \vec{E}_0 = 0. \quad (1.2.7)$$

Au moyen de l'équation (1.2.6), on montre:

$$\vec{\nabla} \vartheta \cdot \vec{E}_0 = 0. \quad (1.2.8)$$

Ce résultat permet de simplifier l'équation (1.2.7) et d'écrire que:

$$[\vec{\nabla} \vartheta \cdot \vec{\nabla} \vartheta - n^2] \vec{E}_0 = 0. \quad (1.2.9)$$

Puisqu'on s'intéresse à des solutions non triviales ( $E_0 \neq 0$ ), on doit conclure que la fonction  $\vartheta(x,y,z)$  obéit à l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{|\vec{\nabla} \vartheta|^2 = n^2.} \quad (1.2.10)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de l'iconale (du grec *eikon* qui signifie *petite image*). Cette équation s'écrit explicitement en coordonnées cartésiennes:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z).$$

Pour un milieu optique d'indice  $n(x,y,z)$ , il faut, d'abord, résoudre l'équation iconale avant de chercher, au moyen des équations (1.2.5 et 1.2.6), les champs  $E_o$  et  $H_o$ . Cependant, l'optique géométrique consiste à s'intéresser uniquement à cette phase iconale et à négliger le calcul de  $E_o$  et  $H_o$  qui serait une solution de premier ordre pour les champs exacts.

### 1.2.2 Le vecteur de Poynting en optique géométrique

Selon les lois de l'électromagnétisme, la densité de puissance lumineuse se propage selon le théorème de Poynting:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}. \quad (1.2.11)$$

D'après l'approximation de l'optique géométrique, le vecteur de Poynting moyen s'écrit:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E}_o \times \vec{H}_o^* \}. \quad (1.2.12)$$

En remplaçant  $H_o$  par son expression (1.2.5), on peut réécrire l'équation (1.2.12):

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\eta_0} \text{Re} \{ \vec{E}_o \cdot \vec{E}_o^* \vec{\nabla} \vartheta - (\vec{E}_o \cdot \vec{\nabla} \vartheta) \vec{E}_o^* \}$$

En se servant du résultat (1.2.8), on obtient, finalement:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\eta_0} |\vec{E}_o|^2 \vec{\nabla} \vartheta. \quad (1.2.13)$$

D'autre part, on sait que la densité moyenne d'énergie magnétique est égale à la densité moyenne d'énergie électrique. La densité totale d'énergie  $W$  peut donc s'écrire:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}_o|^2 = \frac{1}{2} n^2 \varepsilon_0 |\vec{E}_o|^2. \quad (1.2.14)$$

En terme de cette quantité, le vecteur de Poynting devient:

$$\langle \vec{S} \rangle = W \frac{c}{n^2} \vec{\nabla} \vartheta,$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Par ailleurs, on sait que la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice  $n$  est  $v = c/n$  et, en utilisant l'équation de l'iconale (1.2.10), on montre que:

$$\langle \vec{S} \rangle = W v \frac{\vec{\nabla} \vartheta}{|\vec{\nabla} \vartheta|}. \quad (1.2.15)$$

Ce résultat nous dit que, selon l'approximation de l'optique géométrique, la puissance transportée suit une trajectoire perpendiculaire ( $\vec{\nabla}\vartheta$ ) à la fonction iconale. Ceci nous amène, alors, à nous intéresser à ces trajectoires que l'on nomme *rayons géométriques*.

### 1.2.3 Équation des rayons lumineux

Pour trouver la description mathématique représentant la trajectoire des rayons lumineux, nous allons définir un vecteur unitaire  $\vec{a}_s = d\vec{r}/ds$ , où  $d\vec{r}$  désigne l'accroissement du vecteur  $\vec{r}$ , reliant l'origine des coordonnées à un point du rayon lumineux;  $ds$  représente l'accroissement de l'arc du rayon (voir figure 1.1).

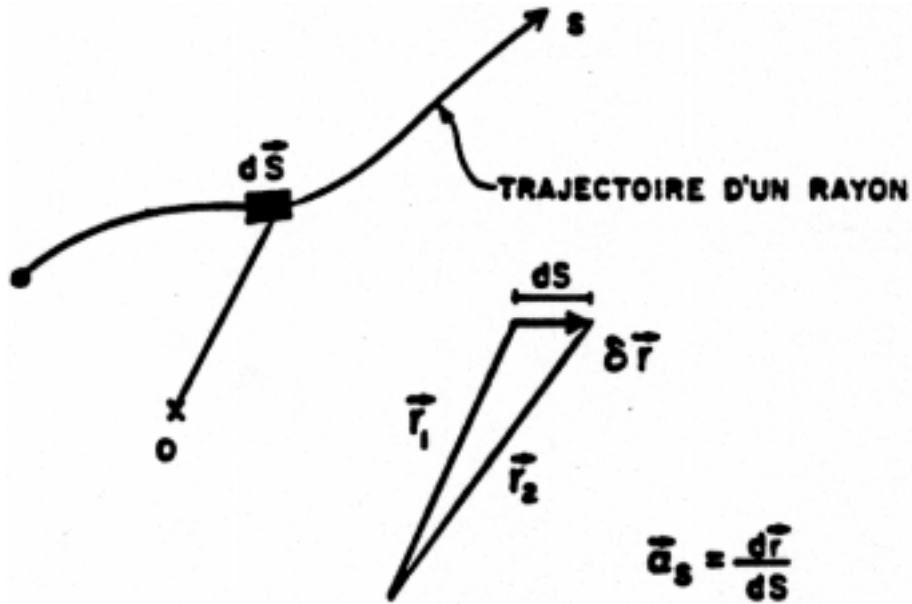


Figure 1.1 Géométrie utilisée pour l'équation des rayons

Ce vecteur est tangent aux rayons et, donc, par définition, perpendiculaire aux fronts de phase:

$$\vec{a}_s \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{(\vec{\nabla}\vartheta)}{|\vec{\nabla}\vartheta|} = \frac{(\vec{\nabla}\vartheta)}{n},$$

c'est-à-dire que:

$$\vec{\nabla}\vartheta = n \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (1.2.16)$$

L'équation des rayons s'obtient en prenant le gradient de l'équation iconale (1.2.10), soit:

$$2\vec{\nabla}\vartheta \cdot \nabla(\vec{\nabla}\vartheta) = 2n\vec{\nabla}n. \quad (1.2.17)$$

Des équations (1.2.16) et (1.2.17), on trouve:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \left[ n \frac{d\vec{r}}{ds} \right] = \vec{\nabla} n. \quad (1.2.18)$$

On rappelle que la dérivée par rapport à la variable locale  $s$  s'écrit:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla}.$$

Ce qui permet d'écrire l'équation (1.2.18) sous la forme:

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left[ n \frac{d\vec{r}}{ds} \right] = \vec{\nabla} n.} \quad (1.2.19)$$

Cette équation est l'équation de la trajectoire des rayons  $\vec{r}$  pour la coordonnée locale  $s$ .

**L'équation de l'iconale (1.2.10) et l'équation des rayons (1.2.19) sont deux descriptions alternatives et complémentaires de l'optique géométrique.**

### Exercice 1.1

On peut aussi obtenir l'équation de l'iconale en cherchant une solution de l'équation d'onde:

$$\nabla^2 \Psi + n^2 k_0^2 \Psi = 0$$

et en posant que:

$$\Psi = \Psi_0 e^{-ik_0 \vartheta}$$

En vous servant d'identités vectorielles et différentielles montrez que l'équation d'onde devient:

$$e^{-ik_0 \vartheta} \left[ \frac{1}{k_0^2} (\nabla^2 \Psi_0) + \frac{1}{ik_0} (\Psi_0 \nabla^2 \vartheta + 2 \vec{\nabla} \Psi_0 \cdot \vec{\nabla} \vartheta) - (\vec{\nabla} \vartheta \cdot \vec{\nabla} \vartheta - n^2) \Psi_0 \right] = 0$$

Lorsque  $k_0 \rightarrow \infty$ , des solutions non triviales de cette équation sont obtenues, seulement si:

$$|\vec{\nabla} \vartheta|^2 = n^2$$

## Exercice 1.2

Pour un milieu homogène ( $n \neq n(x,y,z)$ ), montrez que les trajectoires des rayons sont des droites.

### 1.3 Exemple du milieu d'indice $n(r)$

Un système optique possède souvent un profil d'indice à symétrie circulaire  $n(r)$ . Citons comme exemples: la fibre optique à profil d'indice, les composants optiques de type GRIN et, en particulier, les éléments SELFOC.

Afin de solutionner l'équation des rayons (1.2.19), on introduit le rayon vecteur  $\vec{r}$  en coordonnées cylindriques:

$$\vec{r} = r\vec{a}_r + z\vec{a}_z, \quad (1.3.1)$$

et sa dérivée par rapport à  $s$ :

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dr}{ds}\vec{a}_r + r\frac{d\phi}{ds}\vec{a}_\phi + \frac{dz}{ds}\vec{a}_z \quad (1.3.2)$$

puisque

$$\frac{d\vec{a}_r}{ds} = \frac{d\phi}{ds}\vec{a}_\phi,$$

et

$$\frac{d\vec{a}_\phi}{ds} = -\left(\frac{d\phi}{ds}\right)\vec{a}_r.$$

L'équation des rayons (1.2.19) devient alors:

$$\left[ \frac{d}{ds} \left( n \frac{dr}{ds} \right) - nr \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 \right] \vec{a}_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left( nr^2 \frac{d\phi}{ds} \right) \right] \vec{a}_\phi + \left[ \frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) \right] \vec{a}_z = \vec{\nabla} n(r) = \left( \frac{dn}{dr} \right) \vec{a}_r \quad (1.3.3)$$

Le gradient de  $n(r)$  étant seulement dans la direction radiale  $\vec{a}_r$ , on trouve deux constantes de la trajectoire  $r(\phi, z)$  en égalant à zéro la composante  $\vec{a}_\phi$ :

$$n(r)r^2 \frac{d\phi}{ds} = C_1, \quad (1.3.4)$$

et la composante  $\vec{a}_z$ :

$$n(r) \frac{dz}{ds} = C_2. \quad (1.3.5)$$

La composante radiale  $\vec{a}_r$ , nous amène l'équation suivante:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dr}{ds} \right) - nr \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = \frac{dn}{dr}. \quad (1.3.6)$$

La relation (1.3.5) permet d'introduire l'opérateur  $n \frac{d}{ds} = C_2 \frac{d}{dz}$ , qui change l'équation (1.3.6), après l'élimination du terme  $\left( \frac{d\phi}{ds} \right)$ , grâce à la relation (1.3.4), en l'équation suivante:

$$C_2^2 \frac{d^2 r}{dz^2} - \frac{C_1^2}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dr} = 0. \quad (1.3.7)$$

En combinant les relations (1.3.4) et (1.3.5), on montre que:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{C_1}{C_2} \left( \frac{1}{r^2} \right). \quad (1.3.8)$$

Ces deux dernières équations différentielles définissent la trajectoire  $r(\phi, z)$ , des rayons du modèle de l'optique géométrique, indépendamment de la coordonnée locale  $s$  de la trajectoire. Pour un  $n(r)$  donné, on solutionne l'équation (1.3.7) pour  $r(z)$  et, par la suite, on obtient la dépendance  $\phi(z)$  au moyen de l'équation (1.3.8). Les deux constantes de la trajectoire des rayons  $C_1$  et  $C_2$  peuvent se calculer en spécifiant les valeurs de  $\frac{d\phi}{ds}$  et de  $\frac{dz}{ds}$  pour un rayon donné en un plan de référence (e.g.  $z = 0$ ). En particulier, si  $\left( \frac{d\phi}{ds} \right) = 0$  en un plan, on a que  $C_1 = 0$  et, ainsi,  $\frac{d\phi}{dz} = 0$ . C'est-à-dire que  $\phi$  demeure constant pour tout plan  $z$ ; on a alors un rayon méridien. De plus, si, dans un plan  $z$  particulier,  $r = 0$ , la relation (1.3.4) nous donne  $C_1 = 0$ . Dans ce cas, nous aurons nécessairement un rayon méridien. En optique géométrique, on s'intéresse généralement aux rayons méridiens  $\left( \frac{d\phi}{ds} = 0 \right)$  et non aux rayons hélicoïdaux  $\left( \frac{d\phi}{ds} \neq 0 \right)$ . La constante  $C_2$  peut s'écrire en terme de l'angle  $\theta$ , fait par un rayon méridien, au moyen de la relation:

$$\cos \theta = \frac{dz}{ds}. \quad (1.3.9)$$

En particulier, si on évalue la constante  $C_2$  en un plan  $z$  où le rayon méridien fait un angle  $\theta_0$  à une hauteur  $r_0$ , on obtient:

$$C_2 = n(r_0) \cos \theta_0, \quad (1.3.10)$$

et, l'équation des rayons méridionaux s'écrit, finalement:

$$\boxed{n^2(r_0) \cos^2 \theta_0 \frac{d^2 r}{dz^2} - \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dr} = 0.} \quad (1.3.11)$$

Afin de bien visualiser ce résultat, on analyse le cas du milieu d'indice parabolique:

$$n^2(r) = n_0^2(1 - \alpha^2 r^2). \quad (1.3.12)$$

On montre alors que la solution de l'équation des rayons s'écrit comme:

$$r = r_0 \cos \frac{\pi z}{F} + \frac{F}{\pi} \tan \theta \sin \frac{\pi z}{F}, \quad (1.3.13)$$

où 
$$F = \frac{\pi n(r_0) \cos \theta}{n_0 \alpha}. \quad (1.3.14)$$

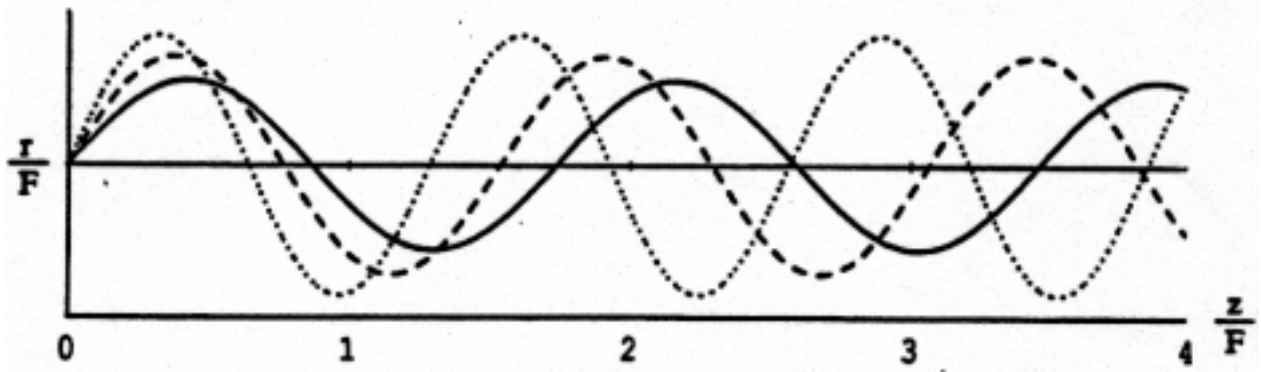


Figure 1.2 Rayons méridionaux d'un profil parabolique

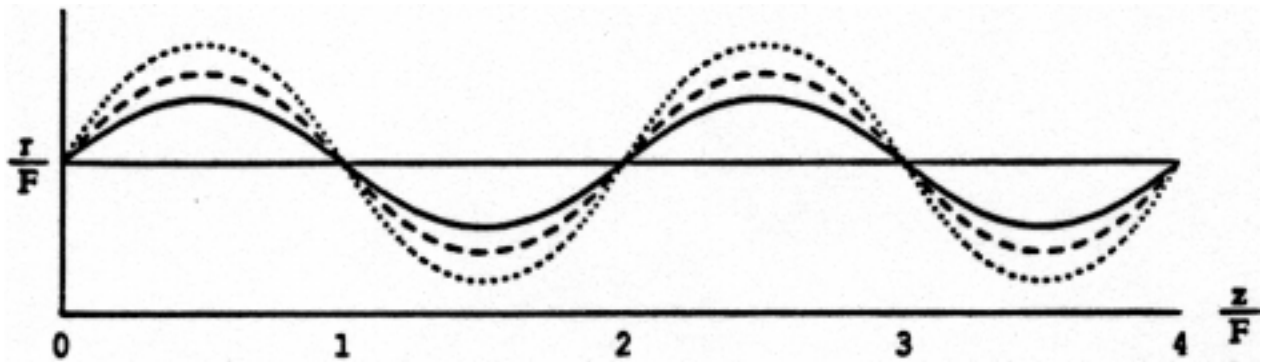


Figure 1.3 Rayons méridionaux d'un profil SELFOC

La figure 1.2 nous montre la trajectoire des rayons méridionaux pour la condition initiale  $r_0 = 0$ , et différentes conditions  $\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=0} = \tan \theta_0$  pour la pente du rayon à l'entrée. On note que le rayon rencontre l'axe  $z$  à des distances différentes, pour des pentes initiales  $\theta_0$  différentes. Ceci

est une conséquence de la dépendance du paramètre  $F$  sur l'angle  $\theta_0$  (1.3.14). Il s'ensuit alors qu'un point source n'est pas parfaitement imagé par un composant optique parabolique. D'autre part, un composant optique de profil  $n(r) = n_0 \operatorname{sech}(\alpha r)$  permet de réaliser un élément optique stigmatique (voir figure 1.3) qui image parfaitement un point source (voir exercice 1.3).

### Exercice 1.3

Montrez que le profil d'indice SELFOC<sup>®</sup>  $n(r) = n_0 \operatorname{sech}(\alpha r)$  permet d'imager parfaitement un point source à une distance  $F = \frac{\pi}{\alpha}$ .

### Exercice 1.4

Montrez que la hauteur maximum  $r_{\max}$  atteinte par un rayon méridien de pente  $\theta_0$  sur l'axe, peut être calculée au moyen de la relation suivante:

$$n(r_{\max}) = n_0 \cos \theta_0$$

## 1.4 Optique géométrique paraxiale

Nous sommes particulièrement intéressés à l'étude de la propagation de faisceaux laser. Un faisceau est caractérisé par un pinceau de lumière dont la divergence est faible. Les rayons de l'optique géométrique, correspondants à ce type de distribution, seront caractérisés par des angles  $\frac{dr}{dz}$  faibles et seront concentrés au voisinage de l'axe, lors de leur propagation. La description géométrique d'un faisceau se fera donc, essentiellement, par un ensemble de rayons méridionaux de pente  $\theta$  suffisamment petite, de sorte que les approximations  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$  et  $\cos \theta \approx 1$  soient justifiées. L'équation de ces rayons méridionaux (1.3.11) s'écrira donc:

$$n^2(r_0) \frac{d^2 r}{dz^2} - n(r) \frac{dn}{dr} = 0. \quad (1.4.1)$$

De plus, pour un faisceau paraxial, les rayons s'éloignent très peu de l'axe de propagation, de sorte que, l'approximation  $n(r) \approx n(r_0) \approx n(0) = n_0$  est valide. Ceci permet de simplifier davantage l'équation des rayons qui devient:

$$n_0 \frac{d^2 r}{dz^2} - \frac{dn}{dr} = 0. \quad (1.4.2)$$

Cette dernière équation est l'équation des rayons paraxiaux pour un milieu d'indice cylindrique  $n(r)$ . Pour un milieu d'indice plus général  $n(x,y,z)$ , on note que l'équation des rayons paraxiaux peut s'obtenir de l'équation (1.2.19), en supposant l'approximation  $ds \approx dz$ .

Puisqu'on veut, ici, limiter l'analyse aux rayons paraxiaux, il faut s'assurer que le milieu optique de propagation supporte cette condition. C'est-à-dire qu'il faut exiger que  $n(r)$  corresponde à un milieu paraxial. Le milieu optique le plus général, qui satisfait cette condition, est le milieu d'indice parabolique:

$$n(r) = n_0 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^2 \right]. \quad (1.4.3)$$

En effet, puisqu'on exige que les rayons demeurent proche de l'axe, le milieu optique peut, en toute généralité, être décrit par un développement en série de son indice  $n(r)$ , limité au deuxième ordre. Pour ce milieu d'indice parabolique, l'équation des rayons (1.4.2) devient:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \alpha^2 r = 0. \quad (1.4.4)$$

La solution de cette équation différentielle, avec les conditions aux limites  $r(0) = r_0$  et  $\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=0} = \theta_0$ , s'écrit simplement:

$$r = r_0 \cos(\alpha z) + \frac{\theta_0}{\alpha} \sin(\alpha z). \quad (1.4.5)$$

La trajectoire des rayons est donc décrite par des fonctions sinusoïdales, selon une trajectoire identique à celle de la figure (1.3). Notez qu'en fait le milieu parabolique est le milieu parfait (stigmatique) lorsque le point source ne contient que des rayons paraxiaux ( $\theta_0$  très petit).

Dans le cadre de l'optique géométrique, on est intéressé à suivre la trajectoire d'un rayon caractérisé par sa hauteur  $r$  et sa pente  $\theta = \frac{dr}{dz}$ . Pour le milieu parabolique, la pente, dérivée de l'équation (1.4.5), devient:

$$\theta = -\alpha r_0 \sin(\alpha z) + \theta_0 \cos(\alpha z). \quad (1.4.6)$$

Il est d'usage, en optique géométrique, de définir le rayon au moyen du vecteur  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ , de sorte que les équations de propagation (1.4.5) et (1.4.6) s'expriment comme le produit matriciel suivant:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha z) & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha z) \\ -\alpha \sin(\alpha z) & \cos(\alpha z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.7)$$

Notez que le déterminant de la matrice est égal à un.

Puisque le milieu d'indice parabolique est le milieu le plus général en optique paraxiale, la propriété matricielle (1.4.7) est tout à fait générale et, on peut conclure que tout système optique paraxial peut se décrire en terme du vecteur d'entrée,  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{\text{entrée}}$ , et du vecteur de sortie,

$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{\text{sortie}}$ , de ses rayons géométriques, au moyen de l'équation matricielle:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{\text{sortie}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}_{\text{entrée}}. \quad (1.4.8)$$

Par exemple, une translation dans un milieu d'indice constant  $n_0$  correspond au milieu parabolique lorsque le paramètre  $\alpha = 0$ . On obtient alors la matrice de translation:

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cependant, si la translation se fait à partir d'un milieu d'indice  $n_1$ , dans un milieu d'indice  $n_0$  sur une distance  $z$ , avec sortie du rayon dans un milieu d'indice  $n_2$ , il faut appliquer la loi de Snell sous sa forme paraxiale ( $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$ ). Par exemple, si on cherche la matrice de transfert du système optique, décrit à la figure (1.4), on trouve que:

$$r_2 = r_1 + \frac{zn_1\theta_1}{n_0}, \quad (1.4.9)$$

$$n_2\theta_2 = n_1\theta_1.$$

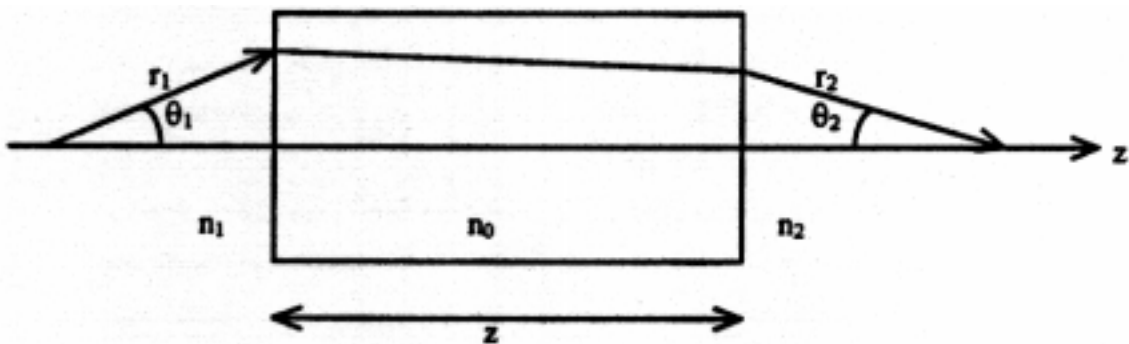


Figure 1.4

Afin de garder, pour tout système optique, la propriété simple  $AD - BC = 1$ , il est d'usage de définir le vecteur du rayon en termes de sa pente réduite,  $n\Theta$ , où  $n$  est l'indice du milieu où est mesuré l'angle. La forme matricielle de l'équation (1.4.9) devient alors:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ n_2 \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z}{n_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.10)$$

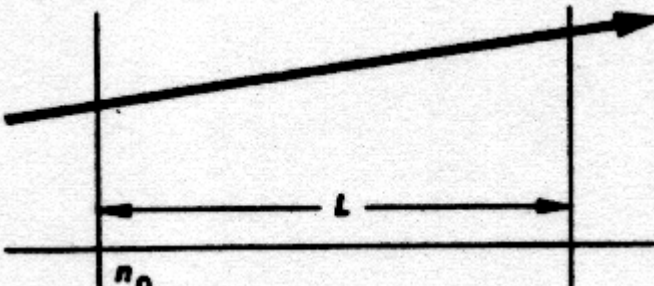
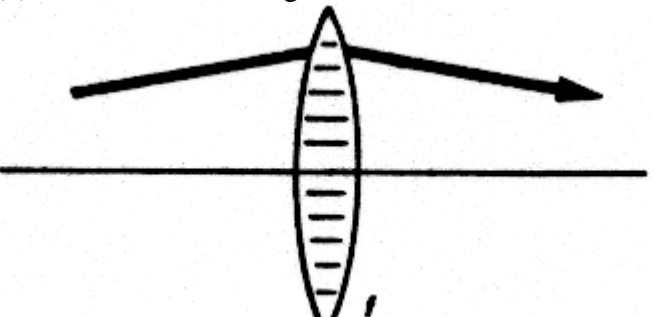
Pour ce vecteur, avec pente réduite, la matrice du milieu parabolique s'écrira:

$$\begin{pmatrix} r \\ n\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha z) & \frac{1}{n_0 \alpha} \sin(\alpha z) \\ -\alpha n_0 \sin(\alpha z) & \cos(\alpha z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ n_0 \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.11)$$

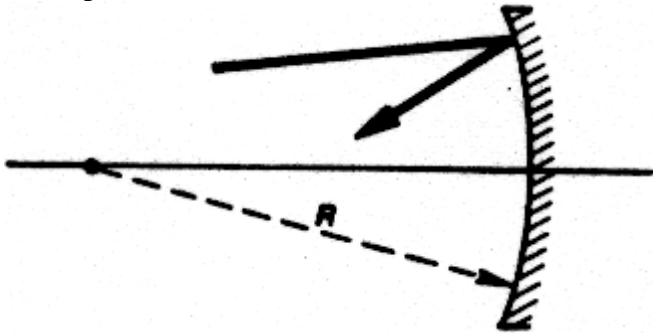
La matrice de transfert d'une lentille mince peut, à la rigueur, s'obtenir de la matrice d'un milieu parabolique d'épaisseur  $z \rightarrow 0$  mais, de paramètre  $\alpha \rightarrow \infty$ . Cependant, il est plus simple de la calculer au moyen des lois habituelles de l'optique paraxiale. La table (1.1) nous décrit les matrices de transfert ABCD des éléments optiques les plus usuels qui servent à composer un système optique général. Notez qu'une matrice globale de transfert, d'un système formé de plusieurs éléments représentés par une matrice correspondante, s'obtient par calcul matriciel. Cela simplifie grandement l'analyse de tel système. De plus, puisque le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants de chacune d'elles, il s'ensuit que la propriété  $AD - BC = 1$  est conservée pour la matrice globale du système.

**Table 1.1**

**Matrices de propagation, pour un faisceau paraxial, dans différents éléments optiques**

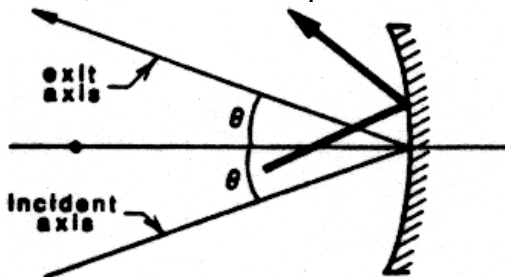
<p>(a) Propagation dans le vide, indice <math>n_0</math>, longueur <math>L</math></p> 	$\begin{bmatrix} 1 & L/n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>(b) Lentille mince, longueur focale <math>f</math></p> 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$

(c) Miroir courbe, rayon R, incidence normale  
 $R > 0$  pour un miroir concave



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Miroir courbe, incidence arbitraire  
 $R_e = R \cos\theta$  dans le plan d'incidence (tangential)  
 $R_e = R / \cos\theta$   $\perp$  au plan d'incidence (sagittal)



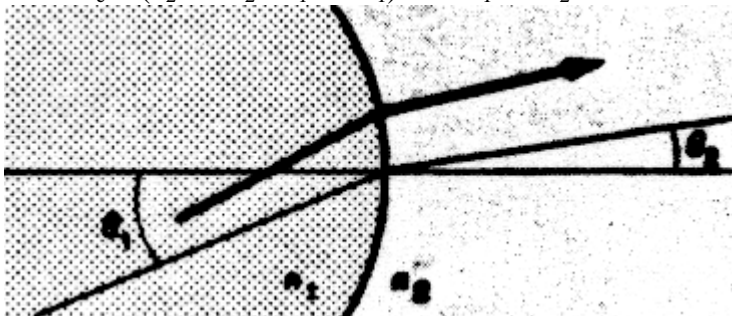
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_e & 1 \end{bmatrix}$$

(e) Interface diélectrique courbe, incidence normale  
 $R > 0$  pour une surface concave



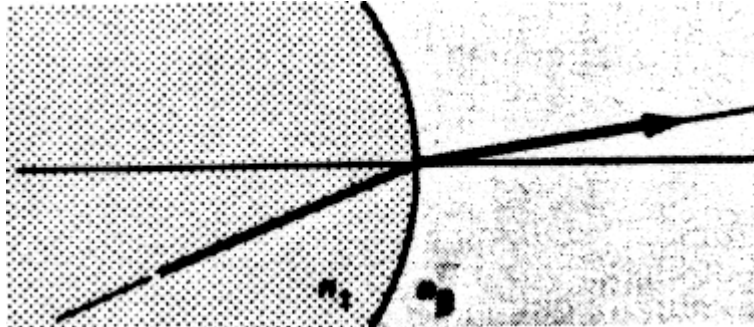
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - n_1)/R & 1 \end{bmatrix}$$

(f) Interface courbe, incidence arbitraire, plan tangentiel  
 $R > 0$  pour une surface concave;  $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$   
 $\Delta n_e = (n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1) / \cos\theta_1 \cos\theta_2$



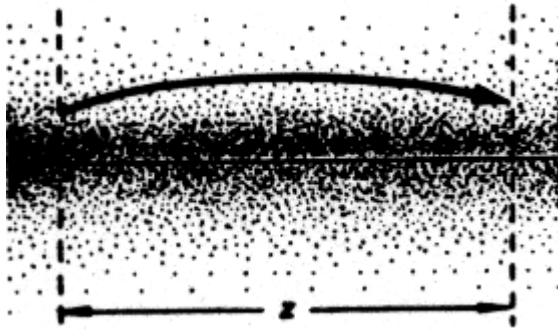
$$\begin{bmatrix} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} & 0 \\ \Delta n_e / R & \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \end{bmatrix}$$

- (g) Interface courbe, incidence arbitraire, plan sagittal  
 $R > 0$  pour une surface concave;  $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$   
 $\Delta n_e = n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta n_e / R & 1 \end{bmatrix}$$

- (h) Région d'indice et de gain variables radialement  
 $n(x) = n_0 - \frac{1}{2} n_2 x^2$ ;  $\alpha^2 = n_2 / n_0$



$$\begin{bmatrix} \cos\alpha z & (n_0\alpha)^{-1} \sin\alpha z \\ -(n_0\alpha) \sin\alpha z & \cos\alpha z \end{bmatrix}$$